L'effacement du temps par les anneaux commutatifs

Christophe Chalons, université Paris7, équipe de logique mathématique

April 6, 2014

Contents

Chapter 1

Introduction

Nous étudions des informations qui nous sont envoyés par certains axiomes de grands cardinaux sur des objets des mathématiques quotidiennes. Il est connu que la non commutativité fait, en un certain sens émerger une idée robuste de temps. Une question complémentaire consiste à se demander si la commutativité "<fait disparaitre"> les idées de temps. La réponse est affirmative, comme nous allons le voir: pour ce qui concerne les anneaux commutatifs unitaires, il y a équivalence entre tendance à l'artinianité et tendance à la noethérianité. Cela complète le célèbre théorème qui affirme qu'un anneau commutatif artinien est forcément noethérien.

On constate aussi (dans cette version1 nous n'en donnons qu'une preuve partielle, la preuve plus générale étant assez laborieuse, mais utilisant la même idée) que la compacité est incompatible avec la conjonction "<grande cardinalité + noethérianité">, et ce pour **n'importe quelle structure**.

Une version ultérieure précisera le contenu philosophique du titre à travers la façon dont la corrspondance de Curry howard lie le temps à l'étude mathématique des preuves d'énoncés de la forme *pour tout ordinal a, il existe un ordinal b tel que blablabla* dont le contenu programatique (une preuve EST un programme) "<transforme en un certain sens qui sera précisé les ordinaux en pointeurs ordonnés, ordre qui ne se brise pas au cours du temps.

Chapter 2

Effets des grands cardinaux sur certains objets usuels

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous signalons des “petits effets” informatifs des grands cardinaux sur des structures **algébriques** munies d'une topologie qui rend les opérations continues, ou parfois d'autres genres d'espace topologiques.

Soit E un ensemble. On note ici $T_n(E)$ l'ensemble des applications de E^n dans E et $T_f(E)$ la réunion, quand n parcourt $\mathbb{N}$ des $T_n(E)$. Pour un élément $a \in T_n(E)$, on notera $arite(x) := n$.

Définition 1 *Une structure algébrique est un couple $S := (E, I, F)$ où F est une famille d'éléments de $T_f(E)$ indicée par I, ie une application de I dans $T_f(E)$*

Définition 2 *Soit $S = (E, I, F)$ une structure. On appelle morphisme de S une application ϕ de E dans E telle pour tout $i \in I : \phi \circ F(i) = F(i) \circ (x \mapsto (\phi \circ x))$*

C'est l'écriture habituelle de ce que signifie “morphisme”. Les $F(i)$ sont appelées les opérations de S.

2.2 Effet des cardinaux supercompacts

Soit S une structure. On la suppose munie d'une topologie qui rend continue toutes ses opérations. On dira alors qu'elle est une *structure topologique*. On dira qu'elle est *simple* si tous ses morphismes sont injectifs ou constants.

Théorème 3 *Soit k un cardinal supercompact. Soit $S = (E, I, F)$ une structure topologique, compact et simple. Si $card(I) < k$ alors $k > card(E)$*

2.2.1 Preuve du théorème

La preuve est exprimée en analyse non standard. Soit $S := (E, I, F)$ une structure et T une topologie qui rend (E, T) compact et telle que toutes les opérations $F(i)$ pour $i \in I$ sont continues pour T. Soit k un cardinal supercompact. Ces données sont suposées standards.

On suppose que $card(I) < k$. Suite à la propriété de supercompacité de k, soit un ensemble Z tel que:

- $k > card(Z)$
- Pour tout a qui est standard, si $a \in E \cup T \cup T^2$ alors $a \in Z$
- Pour toute application f qui est standard et dont le domaine D est tel que $Z \in D$, il existe un élément a standard tel que $f(Z) = a$ ou $f(Z) \notin Z$
- toute application standard dont le domaine contient Z comme élément, et à image incluse dans I est telle que l'image de Z est un élément standard de I.

On va construire un morphisme surjectif de E dans Z.

Lemme 4 *Pour tout $x \in E$ il existe* **un unique** *$y \in Z \cap E$ tel que pour tout $U \in Z \cap T$: si $y \in U$ alors $x \in U$*

Preuve du lemme

Soit g, h des fonctions standards, dont le domaine contient Z, et telle que pour tout $y \in Z \cap E : y \in h(Z)(y) \in T \cap Z$ et $g(Z) \notin h(Z)(y)$. A chaque $a \in E$ qui est standard, on associe $U(a)$ qui est standard tel que $h(Z)(a) = U(a)$ de sorte que $a \mapsto U(a) \in T$ soit standard. Cela donne un recouvrement de E, puisque pour tout a standard, $a \in U(a)$ et $a \mapsto U(a)$ est standard. Soit F un ensemble fini standard tel que $\forall x \in E \exists y \in f : x \in U(y)$. Soit $b \in F$ standard donc tel que $g(Z) \in U(b)$. On obtient une contradiction puisque $b \in Z$.

Prouvons l'unicité annoncée: dans le cas contraire, soient $x \in E$ et a, b dans Z différents, mais tels que pour tout élément U de $Z \cap T$, si $U \cap \{a; b\}$ n'est pas vide alors $x \in U$. On peut les choisir standards. De plus, il existe une application f de domaine $E' := E^2 \backslash$ sa diagonale telle que pour tous $(t, y) \in E'$: si on note $(U, V) := f(t, y)$ alors $t \in U$ et $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. C'est en particulier le cas pour $(U, V) := f(a, b))$ pour lequel on devrait avoir $x \in U \cap V$. Contradiction.

On vient donc de prouver l'existence d'une application ϕ qui n'est pas à priori standard qui va de E dans Z et a la propriété que pour tout $x \in E$ et tout $U \in Z \cap T$: si $\phi(x) \in U$ alors $x \in U$. Il reste à établir que c'est un morphisme. Il suffit de le prouver pour un $i \in I$ qui est standard. Pour simplifier on va supposer que $F(i)$ est d'arité 2, et la noter $*$.

Retour à la preuve du théorème

On souhaite prouver que $\phi(x*y) = \phi(x)*\phi(y)$. si ce n'est pas le cas, on peut supposer, sans perte de généralité que le couple (x, y) est de la forme (x_Z, y_Z) où $Z \mapsto (x_Z, y_Z)$ est une fonction standard de domaine contenant Z comme élément. Il s'ensuit que les $\phi(x), \phi(y), \phi(x*y)$ sont eux-mêmes standards car obtenus comme images de Z par des fonctions choix standards.

Supposons que U, V soient des ouverts standards ne se rencontrant pas et tels que $\phi(x * y) \in U$ et $\phi(x) * \phi(y) \in V$. Pour abréger, notons $(a, b) := (\phi(x), \phi(y))$, et $c := \phi(x * y)$. La continuité de $*$ entraine qu'il existe un ouvert W standard qui contient (a, b) tel que pour tout $(u, v) \in W : u * v \in V$. Comme $W \in Z$ (on peut supposer $W \in T^2$), en particulier $(x, y) \in W$ donc $x * y \in V$. Comme $V \in Z$ et $c \in U \in Z$ on a pourtant que $x * y \in U$ ce qui est contradictoire.

Remarque: si $x \in Z$ alors $\phi(x) = x$. Il s'ensuit que le morphisme ϕ allant de E dans Z ne peut être qu'injectif. Donc $E = Z$ et $card(E) < k$.

2.3 Intuition produite par les grands cardinaux sur les espaces métriques connexes

Il est trivial que si W est un ultrafiltre ω_1-additif sur un espace métrique connexe alors il contient un fermé d'intérieur vide. Cela montre qu'il est toujours possible de recouvrir un espace métrique connexe par un petit nombre de fermés d'intérieur vide (un nombre précisément plus petit que le plus petit cardinal fortement compact). Une lecture attentive de l'argument évoqué permet de consrtuire une preuve dans ZFC, très courte, du théorème suivant:

Théorème 5 *Soit (E, d) un espace métrique sans point isolé. Alors il existe un ensemble S de fermés d'intérieur vide tel que $card(S) \leq card(\mathbb{R})$ et S recouvre E*

2.3.1 Preuve du théorème

Soit $n > 0$ un entier. Soit A_n une partie maximal pour l'inclusion de E telle que $\forall (x, y) \in A^2 : nd(x, y) \geq 1$. Soit $B :=$ la réunion des A_n quand n parcourt $\mathbb{N}^*$. L'ensemble B est dense dans E. Soit $F(p, n)$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $dist(x, A_n) \geq 1$. Chaque $F(p, n)$ est fermé et E est la réunion de A_n avec la réunion des $F(p, n)$ quand p parcourt $\mathbb{N}^*$. Comme E est sans point isolé, chaque A_n est un fermé d'intérieur vide. Soit $x \in E$. Ou bien il appartient à l'un des A_n ou bien, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in F(p, n)$, donc il existe une suite u d'entiers telle que $x \in C(u) :=$ l'intersection quand n parcourt $\mathbb{N}^*$ des $F(u(n), n)$.

De plus, chaque $C(u)$ est un fermé d'intérieur vide. Conclusion: les A_n et les $C(u)$ forment à eux tous une famille de fermés d'intérieur vide qui recouvre E

2.4 Les groupes simples et compacts sont petits

Le fait qu'un groupe compact ne peut avoir un cardinal plus grand qu'un cardinal supercompact est un cas particulier des théorèmes ci-dessus. En annexe, nous mentionnons une preuve de Jean-Louis Tu, de quelques lignes, qui établit le même résultat sans utilisation de grands cardinaux.

Nous mentionnons sans preuve[1] un intéressant théorème dû aux grands cardinaux.

Théorème 6 *Il existe un cardinal κ qui borne le cardinal de tout groupe compact et noethérien*

Nous mentionnons à la fin de ce chapitre une conjecture finalement plus globale qui affirme que la cardinal d'une structure est limité par le sup de ses indices de compacité et de noethérianité. Il vient une question qui intéresserait peut-être au delà de la logique:

Question 7 *Peut-on borner dans ZFC le cardinal des groupes compacts et noethériens. De manière plus générale, peut-on borner dans ZFC le cardinal des structures compactes et noethériennes, respectivement, compactes et artiniennes?*

[1] la preuve est un exercice technique de même nature que celui détaillé en début de chapitre, ne faisant pas apparaitre d'argument vraiment différent ou plus astucieux

Chapter 3

Cardinalités des et dans les anneaux commutatifs unitaires

3.1 A propos des anneaux commutatifs

3.1.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie des limitations de cardinalités avec commme objet central les anneaux commutatifs. Un théorème célèbre affirme que les anneaux unitaires et commutatifs qui sont artiniens sont forcément neothériens. Mais c'est un résultat philosophique trop particulier dans notre questionnement. Est-ce que *une tendance à l'artinianité* entraine une *tendance à la noethérianité*, pour les anneaux en général?

Tout le chapitre est sous ZFC (l'axiome du choix est supposé), et sans procès, nous utiliserons parfois des axiomes courants de grands cardinaux.

3.1.2 Définitions

Soit A un anneau commutatif unitaire.

Définition 8

- *$Ideaux(A)$ est l'ensemble des idéaux de A*
- *$Artinien(A)$ désigne le plus petit ordinal limite k tel qu'il n'existe pas $i \in k \mapsto J_i \in Ideaux(A)$ vérifiant $\forall i, j$ dans k si $i < j$ alors J_j est strictement inclus dans J_i.*
- *$Noetherien(A)$ désigne le plus petit ordinal limite k tel qu'il n'existe pas $i \in k \mapsto J_i \in Ideaux(A)$ vérifiant $\forall i, j$ dans k si $i > j$ alors J_j est strictement inclus dans J_i.*
- *$Artinien(A)$; $Noetherien(A)$ seront respectivement appelés indice d'artinianité; noethérianité de A.*

D'une manière générale: soit E un ensemble et T un ensemble de parties de E. Ce genre de couple sera appelé un espace-cailloux. Posons $A := (E, T)$.

Définition 9

- *(E, T) est dit séparer les éléments de E quand pour tout x, y dans E distincts il existe U, V dans T d'intersubsection vide et tels que $x \in U$ et $y \in V$*

- *$Artinien(A)$ désigne le plus petit ordinal limite k tel qu'il n'existe pas $i \in k \mapsto J_i \in T$ vérifiant $\forall i, j$ dans k si $i < j$ alors J_j est strictement inclus dans J_i.*
- *$Noetherien(A)$ désigne le plus petit ordinal limite k tel qu'il n'existe pas $i \in k \mapsto J_i \in T$ vérifiant $\forall i, j$ dans k si $i > j$ alors J_j est strictement inclus dans J_i.*
- *$Artinien(A)$; $Noetherien(A)$ seront respectivement appelés indice d'artinianité; noethérianité de A.*

Le théorème célèbre qui affirme la noethérianité des anneaux commutatifs unitaires artiniens dit que si A est un anneau commutatif unitaire alors si $artinien(A) = \omega$ alors $noetherien(A) = \omega$

On remarque qu'on garde le même cardinal ω. Il n'y a pas de raison de penser que ça doit être le cas général, mais à tout le moins on peut se demander si oui ou non:

Question 10 *Pour tout ordinal k il existe un ordinal r tel que pour tout anneau A si $Artinien(A) \leq k$ alors $noetherien(A) \leq r$*

3.1.3 Discussion et lemmes

Et d'une manière générale quelles propriétés suffisantes doivent avoir certaines classes d'espaces (E, T) pour que la réponse à la question ci-dessus soit positive?

Le problème général semble difficile. La **commutativité** des anneaux joue un rôle important si on s'astreint à un certain naturalisme voulant n'autoriser que les (E, T) où $E = F^2$ avec F qui est l'ensemble base d'une structure et T qui est l'ensemble des noyaux de morphismes[1]. On va énoncer et démontrer quelques lemmes qui entrent dans le sujet et finalement aboutir à la preuve du théorème suivant:

Théorème 11 *Pour tout ordinal k il existe un ordinal r tel que pour tout anneau A si $Artinien(A) \leq k$ (respectivement $Noetherien(A) \leq \kappa$) alors $noetherien(A) \leq r$ (respectivement $Artinien(A) \leq \kappa$)*

La rivalité commutatif/non commutatif étant à la mode dans la problématique de mieux comprendre la nature quantique du monde, il nous semble qu'il y a peut-être là un "terrain" d'étude (probablement un peu excessivement général). A travers la question "dans quelles circonstances l'artinianité entraine-t-elle la noethérianité" on touche un problème de renversement d'ordre. D'ailleurs une première approche "naive" ensembliste est plutôt à l'opposé de penser qu'il y a un lien car les ordinaux sont un archétype d'objet qui peut être vu comme artinien et non noethérien (en prenant les segments initiaux et en notant qu'ils forment un ensemble stable par réunions, intersections, qui de plus est fermé, etc, bref partage pas mal de propriétés avec l'ensemble des idéaux d'un anneau). De même en ce qui concerne, de manière générale, les noyaux de morphismes comme l'atteste le lemme suivant:

Lemme 12 *Il n'est pas vrai qu'une tendance à l'artinianité entraîne une tendance à la noethérianité pour la classe des (E, T) où E parcourt les anneaux (non forcément commutatifs) et T l'ensemble des noyaux de morphismes (ie l'ensemble des idéaux bilatères de E). P*

Preuve: nous donnons un argument résumé[2] en bas de page

[1] Le noyau du morphisme ϕ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $\phi(x) = \phi(y)$

[2] **Argument résumé:** Soit F un espace vectoriel. Soit E l'anneau des applications linéaires de F dans F. Les idéaux bilatères de E seront caractérisés par un cardinal et pour chaque cardinal plus petit que la dimension de F, il existe un idéal bilatère qui lui correspond (la borne sup des "rang" de ses éléments). Il s'ensuit que $artinien(E, T) = \omega$ et que $noetherien(E, T) > dimension(F)$.

Revenons aux ordre totaux dans un premier temps. On a même pire qu'une assymétrie. On peut prouver qu'un ordre total compact ayant une certaine élasticité est forcément de petit cardinal:

Lemme 13 *Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et compact pour la topologie engendrée par les segments ouverts. On suppose que pour tout $(x, y) \in E^2$ si ni x, ni y n'est une extrémité de E alors il existe une bijection croissante f de E dans E telle que $f(x) = y$. Alors $card(E) \leq card(\mathbb{R})$*

Preuve laissée au lecteur

On peut s'interroger de plusieurs manières sur les implications d'une tendance à la noethérianité par une tendance à l'artinianité. On peut par exemple se cantonner à des situations où la noethérianité entraîne une petitesse de carrément tout l'ensemble base et se demander si l'artinianité a les mêmes conséquences. Voici deux exemples de situation où la noethérianité a des conséquences drastiques:

Lemme 14 *Soit (E, T) un espace-caillou. On suppose que T est stable par réunions et sépare les éléments de E. Alors $card(E) \leq 2^k$ où $k := noetherien(E, T)$.*

Soit S un ensemble de cardinal $\leq 2^k$ et suffisamment stable. Soit $x \in E \setminus S$. On construit jusqu'à le plus loin possible une application $U : i \in \mu \mapsto U_i \in T$ vérifiant U strictement croissante de $(\mu, \in)$ dans $(T, \subseteq)$ et pour tout $i \in \mu : x \notin U_i \in S$. La réunion $V := \{y \in E \mid \exists i \in \mu : y \in U_i\}$ est élément de S maximal parmi les éléments de $S \cap T$ à ne pas contenir x comme élément. Il existe dans S deux éléments a, b différents tels que $\{a; b\} \cap V = \emptyset$. Il existe **dans S** un couple $(V_1, V_2) \in T^2$ d'intersubsection vide contenant respectivement (a, b). Et comme $\{V \cup V_1; V \cup V_2\} \subseteq S$ on obtient une contradiction. Finalement $S = E$

Une autre conséquence de la noethérianité est presque tautologique:

Définition 15 *On dit que le triplet (E, T, Z) est joli quand (E, T) est un espace-caillou, avec T fermé pour la topologie canonique de 2^E et $Z \supseteq T$ est clos par intersections*

Le lemme suivant fait un clin d'oeil au fait que la noethérianité d'un anneau implique qu'il admet peu d'idéaux premiers minimaux:

Lemme 16 *Pour tout ordinal k, il existe un cardinal r tel que pour tout joli triplet (E, T, Z) si $Noetherien(E, Z) \leq k$ alors l'ensemble M des éléments minimaux de T a un cardinal qui ne dépasse pas r*

(On utilise ici un axiome de grand cardinal)
Soit k et μ un cardinal tel que tout filtre μ-additif se prolonge en un ultrafiltre μ-additif avec $\mu > k$. Soit (E, T, Z) un joli triplet avec (E, Z) d'indice de noetherianité $\leq k$. On montre que tout ultrafiltre μ-additif W sur M est principal. Soit $U_i, i \in \alpha$ une séquence strictement croissante d'éléments de Z telle que pour tout $i \in \alpha$ l'ensemble des $X \in T$ tel que $U_i \subseteq X$ est un élément de W. On suppose la construction **poussée jusqu'à ne plus pouvoir être continuée**. Remarque: elle peut commencer puisque $\cap(T) \in Z$

L'additivité de W ainsi que le faible indice de noethérianité de (E, Z) font que α est un ordinal successeur $\beta + 1$ et que $H := U_\beta$ est maximal parmi les $V \in T$ tel que $\{X \in T \mid V \subseteq X\} \in W$.

Si $\{X \in T \mid a \in X\} \in W$ alors $a \in H$. En effet, sinon, l'intersubsection des éléments K de Z tels que $a \in K$ et $H \subseteq K$ pourrait servir de U_α. La fermeture de T entraine alors que $H \in T$. Or $M \cap \{X \in T \mid H \subseteq X\}$ est un singleton, ce qui termine le raisonnement.

Nous allons voir dans la suite que dans ces deux situations relativement générales, l'artianité a les mêmes conséquences que la noethérianité! Les mêmes lemmes seront démontrés en remplaçant "noethérien(X)" par "artinien(X)". Les énoncés sont presque des copiés-collés des précédents:

Théorème 17 *Pour tout ordinal k, il existe un cardinal r tel que pour tout joli triplet (E, T, Z) si $Artinien(E, Z) \leq k$ alors l'ensemble M des éléments minimaux de T a un cardinal qui ne dépasse pas r*

Avant d'écrire une preuve, rappelons un lemme topologique:

Lemme 18 *Soit (E, T, Z) un joli triplet. Soit M l'ensemble des éléments minimaux de T. Soient $P \in M$ et $a \in P$. Il existe alors un ensemble fini F disjoint de P tel que $\forall X \in T$: si $a \notin X$ alors $X \cap F \neq \emptyset$*

Preuve du théorème (en bas de page, on en a écrit une en ANS[3]):

On se donne un cardinal κ bien plus grand que l'indice d'artinianité de (E, Z) et qui soit un cardinal de Ramsey. A vrai dire, nous n'allons utiliser que des propriétés d'indiscernabilité prouvable dans ZFC via le théorème de Erdos Rado! Pour deux éléments distincts X, Y de M, on note $f(X, Y)$ un élément tel que $f(X, Y) \in X \setminus Y$.

Soit une injection $i \in \kappa \mapsto X_i$ de κ dans M. Soit T un sous-ensemble non borné de κ dont les éléments sont indiscernables au regard des propriétés que l'on peut décrire à l'aide de $f, \in$.

On a ou bien que pour tous éléments a, b, c de T si $a < b < c$ alors $X_a \ni f(X_b, X_c)$ ou bien que pour tous éléments a, b, c de T si $a < b < c$ alors $f(X_b, X_c) \notin X_a$. Notons a^* le premier élément de T qui suit a et $u(a) := f(X_a, X_{a^*})$. Dans le premier cas on obtient que la famille $Y_i :=$ l'intersection des X_a quand a parcourt $T \cap i$ induit une application de $T \cap \kappa$ dans M qui est strictement décroissante, ce qui contredit la faible artianité de (E, T, Z). On peut donc ne traiter que le deuxième cas.

On remarque que $u(a) \in X_a \setminus X_{a^*}$. Le lemme rappelé juste au dessus entraîne l'existence d'un entier n et d'une suite finie $(v_1(a), .., v_n(a))$ telle que pour tout $b \neq a : X_b$ rencontre $\{v_1(a); ..; v_n(a)\}$.

Soit un sous-ensemble T_2 non borné de T, d'indiscernables pour les prorpiétés décrites avec v. Parmi les numéros $1; ..; n$, il en existe un disons s tel que les éléments a, b de T_2 vérifient tous: si $a < b$ alors $v_s(b) \in X_a \setminus X_b$, ce qui ramène cette deuxième situation au premier cas, permettant de conclure de la même façon

Le théorème suivant est un copié-collé où on a seulement remplacé le mot “noethérien” par “artinien” dans l'autre exemple:

Lemme 19 *Pour tout ordinal κ il existe un ordinal μ tel que pour tout couple (E, T) : si (E, T) est un espace-caillou: et T est stable par réunions et sépare les éléments de E et $artinien(E, T) \leq \kappa$ alors $card(E) \leq \mu$*

3.1.4 Remarque

Dans aucun des lemmes qui précèdent ou qui suivent, on ne cherche à optimiser et donner des limites exactes. On se contente de signaler la majoration. On donne une preuve du théorème en utilisant à nouveau des indiscernables.

Soient f, g telles que pour tous x, y dans E qui sont différents: $f(x, y) \ni x$ et $g(x, y) \ni y$ et $f(x, y) \cap g(x, y) = \emptyset$. Soit un cardinal limite assez grand μ (beaucoup plus grand que κ) et une application $i \mapsto x_i$ de μ dans E formée d'indiscernables pour les propriétés décrites avec $\in, f, g$. Etant donné $i < j < k$ tous les trois éléments de μ, on est sur que x_i n'appartient pas à l'un des deux ensembles $f(x_j, x_k); g(x_j, x_k)$. Il existe ainsi une application u de μ dans E ayant la propriété suivante: pour tous i, j dans μ avec $i < j : x_i \notin u(j)$ et $x_i \in u(i)$.

Soit $\alpha \in \mu$ et $D_\alpha := \{x \in E \mid \exists \beta > \alpha : x \in u(\beta)\} \in T$. La décroissance de $\alpha \mapsto D_\alpha$ contredit l'hypothèse de tendance à l'artiniaté de (E, T)

[3] Voici une preuve en analyse non standard. Le couple (a, P) est supposé standard. Soit $X \in T$ tel que $a \notin X$, non supposéà priori standard. Soit H son standardisé, ie un ensemble standard qui contient les mêmes éléments standards que X. La fermeture de T entraine que $H \in T$. Et comme $a \notin H$ (car $a \notin X$), donc H n'est pas inclus dans P. Il existe donc un élément standard b tel que $b \in H \setminus P$ donc tel que $b \in X \setminus P$. Ainsi pour tout $X \in T$, si $a \notin X$ alors il existe un b **standard** tel que $b \in X \setminus P$, ce qui entraine le lemme

3.1.5 Cas particulier des anneaux

Soit A un anneau. Alors $(A, Ideauxpremiers(A), Ideaux(A))$ est un joli triplet. Les lemmes précédents indiquent ainsi des informations qui s'appliquent à tous les anneaux. Par exemple, un faible indice d'artinianité d'un anneau entraine un petit nombre d'idéaux premiers minimaux.

Revenons aux anneaux commutatifs unitaires. De très nombreux résultats classiques expriment des limitations. Par exemple, comme on vient de le voir, si $noetherien(A) \leq \omega$ alors le nombre d'idéaux premiers de A est fini (il en va donc de même des anneaux, comme il est classiquement connu, tels que $artinien(A) \leq \omega$ à cause du théorème classique déjà évoqué).

Qu'en est-il des idéaux maximaux? Tout d'abord remarquons que le point de vue adopté ci-dessus est pur alors que la notion d'idéal maximal est quelque peu artificielle, puisque le seul vrai idéal maximal d'un anneau c'est l'anneau entier. De manière plus relative, on pourrait plutôt parler d'idéal maximal ne rencontrant pas tel ou tel ensemble (l'usage voulant qu'idéal maximal désigne généralement, en algèbre, un idéal ne rencontrant pas $\{1_A\}$ l'unité de l'anneau).

Un indice est qu'un anneau noethérien n'a aucune raison à priori de contenir peu d'idéaux maximaux. En effet, si K est un gros corps l'anneau $K[X]$ contient de nombreux idéaux maximaux, en l'occurrence par exemple, les $M_a := (X + a)$. Il est par contre connu que les anneaux artiniens ne contiennent qu'un nombre fini d'idéaux maximaux à cause des deux lemmes classiques que nous rappelons ci-dessous:

Lemme 20 *Soit A un anneau commutatif, $P_1, .., P_n$ des idéaux premiers et P un idéal premier. Alors si $P \supseteq P_1P_2..P_n$ alors il existe i tel que $P \supseteq P_i$*

Lemme 21 *Tout idéal maximal est premier*

et du fait que si, dans un anneau, il y a une suite injective $n \in \mathbb{N} \mapsto M_n$ d'idéaux maximaux alors la suite d'idéaux $n \mapsto M_1M_2..M_n$ est strictement décroissante ce qui empêche l'anneau d'être artinien. Par souci de propreté, nous énonçons le lemme bien connu:

Lemme 22 *Un anneau artinien n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux, et même un nombre fini d'idéaux premiers, pour la même raison*

On peut donc se demander si une tendance à l'artinianité entraîne une tendance à la petitesse du nombre d'idéaux maximaux dans le cas général. La réponse est non:

Lemme 23 *Soit K un corps. L'indice d'artinianité de l'anneau $K[X]$ est $\leq \omega_1$.*

La preuve est académique: l'anneau $A := K[X]$ est principal et si a, b sont dans A et a divise b et b ne divise pas a alors le degré du polynome a est strictement plus petit que le degré du polynome b. Or ces degrés sont des **entiers**

Le problème philosophique des idéaux maximaux est qu'ils sont un peu comme les ultrafiltres. Parmi les ultrafiltres, il y a les ultrafiltres principaux et les ultrafiltres non principaux (qui jouent, comme on l'a signalé, un rôle de fantôme ou d'objet en quelque sorte "virtuel"). On définit donc une notion encore plus forte que la notion d'idéal maximal, celle d'idéal superpremier.

Définition 24 *Soit A un anneau commutatif unitaire. On appelle idéal superpremier P un idéal premier de A tel que pour tout ensemble X d'idéaux de A, si $P \supseteq$ l'intersubsection des éléments de X alors il existe $J \in X$ tel que $P \supseteq J$*

Les idéaux superpremiers ont un rôle assez ressemblant à celui des ultrafiltres **principaux** sur un ensemble:

Lemme 25 *Tout idéal superpremier est maximal. Si P est un idéal premier et Q superpremier, si J est un idéal $\neq A$ et $P \subseteq J$ alors $J \subseteq Q$. Il s'en suit qu'un idéal premier minimal inclus dans un idéal superpremier non trivial* **détermine** *cet idéal superpremier. En particulier, dans tout anneau intègre, s'il y a un idéal superpremier non trivial alors il est le seul idéal maximal et l'anneau est local. Si l'anneau A est un produit de corps $i \in I \mapsto K_i$ alors un idéal de A est superpremier si et seulement s'il est de la forme $T_i := \{x \in A \mid x(i) = 0\}$. Dans un anneau local, le seul idéal maximal est superpremier*

Avant de prouver ce lemme, voyons tout de suite un corollaire:

Théorème 26 *L'indice de noethérianité d'un anneau limite son nombre d'idéaux superpremiers (qui ne peut dépasser son nombre d'idéaux premiers minimaux)*

3.1.6 Preuve du lemme sur les superpremiers

On note l'anneau A et on suppose que Q est superpremier et $1 \notin Q$. Soit b un élément qui $\notin Q$ et qui soit multiple de tout $x \in A$ tel que $x \notin Q$. Alors b^2 divise b donc il existe $x \in A$ tel que $b = xb^2$ ce qui entraine $b(1 - xb) = 0$. Soit P un idéal premier. Ou bien il contient b et n'est donc pas inclus dans Q, ou bien il contient $1 - xb$. Dans ce cas, supposons que $a \notin Q$. Comme b est un multiple de a, il existe $y \in A$ tel que $1 - ya = 1 - xb$ et il s'ensuit que $1 - ya \in P$. L'idéal $P + (a)$ est donc l'anneau entier. Conclusion: si P est un idéal premier inclus dans Q et $1 \notin P + (a)$ alors $a \in Q$. En particulier Q est un idéal maximal. Et même beaucoup plus. Q est le seul idéal maximal à contenir P et les affirmations du lemme en découlent. On laisse au lecteur la preuve de la partie du lemme concernant les produits de corps et la localité

3.1.7 Retour à artinianité vs noethérianité

On en arrive à la question la plus en relation avec les anneaux et qui concerne les cardinaux indices d'artianité et noethérianité. Faisons une première remarque sur une tentative de construire un contre-exemple. Soit κ un cardinal régulier. On note F_2 le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Notons B l'anneau des polynomes construits sur l'ensemble d'indéterminées κ. Soit J l'idéal de B engendré par tous les éléments de la forme $\alpha\beta - \alpha$ quand le couple (α, β) parcourt l'ensemble des couples de κ tels que $\alpha < \beta$, ainsi que les éléments de la forme $\alpha^2 - \alpha$. Notons $A := B/J$ l'anneau obtenu. On garde les éléments de B comme des "noms" d'éléments de A.

Manifestement, $i \in \kappa \mapsto (i)$ est une chaine croissante d'idéaux et même strictement croissante (il faudrait justifier le caractère strict). L'anneau A a donc un indice élevé de noethérianité, dès lors que κ est assez grand. On n'aperçoit pas, au premier abord, son indice d'artinianité comme lui aussi grand.

Lemme 27 *L'indice d'artinianité de A est élévé, précisément, il est au moins κ*

Soit $a \in \kappa$ et a^+ son successeur. Notons $e_a := a^+ + a$. Alors $e_a^2 = a^2 + (a^+)^2 = e_a$. Autrement dit e_a est idempotent. Soient a, b deux ordinaux limite avec $a < b$. Alors le même genre de calcul montre que $e_a e_b = 0$.

On a donc obtenu, en prenant $T :=$ l'ensemble des ordinaux limite éléments de κ et $S :=$ l'ensemble des $e_a, a \in T$, un gros ensemble d'idempotents dont le produit deux à eux est nul. Soit L un ensemble inclus dans S et $R(L)$ l'idéal engendré par L. Supposons que $e \in R(L) \cap S$: alors il existe $e_1, .., e_n$ dans L et $x_1, .., x_n$ tels que $e = x_1 e_1 + ..x_n e_n$. Il s'ensuit que $e = e^2 = x_1 e e_1 + ..x_n e e_n$ n'est pas nul et donc e est l'un des e_i. Par conséquent n'importe quelle famille strictement décroissante d'ensembles $i \in \mu \mapsto C_i \subseteq S$ induit une famille strictement décroissante d'idéaux $i \mapsto R(C_i)$ d'idéaux

3.1.8 Remarque

Dans l'exemple précédent, l'utilisation du corps F_2 n'est pas nécessaire comme le montre les calculs suivants:

$$(a-a')(b-b') = ab + a'b' - a'b - ab' = a + a' - a' - a = 0$$

et

$$(a-a')^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' = a + a' - 2a = a' - a$$

ainsi que le fait que si $a^2 = (-a)$ alors $(-a)^2 = (-a)$

Le lemme suivant indique que **dans le cas général** on ne perd pas en généralité en se ramenant à des familles d'idéaux principaux:

Lemme 28 *Sous des hypothèses de grands cardinaux*

Supposons que pour tout cardinal κ il existe un cardinal μ tel que pour tout anneau A si l'indice d'artinianité de A ne dépasse pas κ alors il n'existe pas $i \in \mu \mapsto J_i$ strictement croissante d'idéaux principaux de A.

Alors pour tout cardinal κ il existe un cardinal μ tel que pour tout anneau A si l'indice d'artinianité de A ne dépasse pas κ alors il n'existe pas $i \in \mu \mapsto J_i$ strictement croissante d'idéaux de A, autrement dit $noetherien(A) \leq \mu$.

La preuve, pour être digeste utilise des hypothèses de grands cardinaux. Il n'est d'ailleurs pas vraiment clair qu'on puisse s'en passer. Supposons qu'un anneau commutatif unitaire A ait un "gros" indice de noethérianité, autrement dit qu'il existe un cardinal κ doté d'une normale-mesure W contenant comme élément l'ensemble des cardinaux mesurables plus petits que κ. On suppose en outre que κ dépasse l'indice d'artinianité de A. Et supposons de plus que $i \in \kappa \mapsto J_i \in Ideaux(A)$ soit strictement croissante.

Il existe $R \in W$ dont on peut supposer que les éléments de R sont suffisamment indiscernables et un entier n tel que pour tous $x_1, x_2.., x_n$ avec $x_1 < .. < x_n$: $x_1 \in$ l'idéal engendré par $x_2, .., x_n$. En effet, sinon, on tirerait de R une $i \mapsto L_i$ l'idéal engendré par les $x_j \in R$ tel que $j > i$ qui serait strictement décroissante

On s'intéresse aux éléments de R de rang limite dans R et on note S leur ensemble. Alors $i \in S \mapsto H_i$l'idéal engendré par $y_1(i), y_2(i), ..y_n(i)$ est strictement croissante, en notant $y_k(i)$ l'élément x_e où e est le $k$ième élément de R qui suit i

On va montrer que l'entier n peut être diminué. Fixons $x_2, .., x_n$ dans R et faisons varier x_1. On a deux cas seulement qui sont possibles:

Cas1: $x_1 \mapsto (x_1) + .. + (x_n)$ est strictement croissante quand x_1 parcourt $x_2 \cap R$. Regardons l'anneau $B := A/(x_2, .., x_n)$. Cet anneau a un indice d'artinianité qui ne dépasse pas celui de A et on vient de construire un anneau de petit indice d'artinianité et dont l'indice de noethérianité est au moins x_2. De plus dans cet anneau la famille strictement croissante est une famille d'idéaux **principaux**

Cas2: $x_1 \in x_2 \mapsto (x_1) + .. + (x_n)$ est constante de valeur $Q(x_2, .., x_n)$ quand x_1 parcourt $x_2 \cap R$. Posons $J := Q(x_2, .., x_n)$. Vue dans l'anneau A/J, la séquence $i \in S \mapsto H_i$ est strictement croissante et composée d'idéaux de type au plus $n-1$.

En prenant le plus petit n tel que blabla au début du raisonnement, on aurait donc forcément la conclusion que $n = 1$

Le lemme qui précède permet de se concentrer sur les idéaux principaux. Finalement, on a le théorème:

Théorème 29 *Grands cardinaux supposés*

Pour tout cardinal κ il existe un cardinal μ tel que pour tout anneau A si l'indice d'artinianité de A ne dépasse pas κ alors il n'existe pas $i \in \mu \mapsto J_i$ strictement croissante d'idéaux de A, autrement dit $noetherien(A) \leq \mu$.

Autrement dit, *pour les anneaux commutatifs unitaires, une tendance à l'aritinianité entraine une tendance à la noethérianité*

3.1.9 Preuve du théorème

Partie de preuve pas encore rédigée, dont le plan est inspiré de l'exemple qui a précédé avec les idempotents, etc

3.2 Anneaux compacts

Il y a quelque chose d'intéressant quand on tente de marier topologie et algèbre à travers les anneaux, c'est qu'ils semblent produire certaines, comment dire, "étincelles". Le fait connu et classique suivant est un exemple:

Théorème 30 *Tout corps compact est fini*

Une preuve en est redonnée un peu plus loin. Est-ce que ces étincelles sont dues plutôt à la noethérianité ou plutôt à l'intégrité (ou autre chose encore)? On a vu précédemment qu'un anneau intègre ne peut, au plus, avoir qu'un seul idéal superpremier. De même un anneau de Boole ne peut pas être intègre sauf à être le corps F_2. Par contre, les anneaux de Boole les plus naturels, ie les 2^I sont naturellement compacts

On rappelle ci-dessous un argument classique qui oblige les anneaux noethériens compacts à être de petits anneaux. On étudiera en fin de chapitre les anneaux compacts intègres. Enfin on signalera un certain nombre de questions dans la même veine que celles des sections précédentes dont la principale est:

Question 31 *Est-ce que l'indice de compacité et l'indice de noethérianité (le maximum des deux) d'un anneau limite le cardinal de cet anneau?*

en définissant *indice de compacité* par:

Définition 32 *Soit A un anneau. On appelle indice de compacité de A le plus petit cardinal k tel qu'il existe une topologie sur A qui est séparée, voit les opérations de A comme continues et vérifiant que tout recouvrement ouvert de A admet un sous-recouvrement de cardinal au plus k*

3.2.1 Anneaux noethériens et compacts

Cette unique sous-section est destinée à simplement rappeler pourquoi les anneaux noethériens et compacts sont petits. Précisément:

Théorème 33 *Si A est un anneau commutatif, noethérien et compact alors $card(A) \leq card(\mathbb{R})$*

Preuve

La preuve qui suit est diffusée écrite classiquement dans probablemement tous les cours d'algèbre consacrés aux anneaux principalement. On l'écrit en analyse non standard.

Tous les idéaux d'un anneau noethérien compact sont fermés. Soit A un anneau qui ne vérifie pas la propriété affirmée par le théorème. Quitte à prendre un ideal J maximal parmi ceux tels que A/J soit un contre-exemple au théorème, on peut supposer que tout quotient strict de A vérifie l'énoncé du théorème. Remarque: la topologie quotient mise sur A/J continue de faire de A un anneau compact, **car elle est séparée**

Donc $card(A) > card(\mathbb{R})$. Soit $a \in A$ tel que a non inversible. On note J_n l'idéal engendré par a^n, pour chaque entier naturel n. Chaque anneau A/J_n a un cardinal qui ne dépasse pas celui de $\mathbb{R}$. Soit S_n un ensemble qui contient un représentant dans chaque classe de A/J_n. A chaque $x \in A$ on associe la suite $n \mapsto u(x)(n) \in S_n$ telle que $foralln \in \mathbb{N} : x - u_n \in J_n$. Le cardinal de $\prod_n S_n$ ne dépasse pas $card(\mathbb{R})$ donc il existe x, y dans A tels que $u(x) = u(y)$ et $x \neq y$. Il s'ensuit que $u(x-y)$ est constante nulle, ie que $z := x - y \in \cap_n J_n$.

Cela entraine que A n'est pas intègre et donc que (0) n'est pas un idéal premier. En effet, si A est intègre et si pour tout entier $n : z = r_n a^n$, l' existence d'un couple (t, n) tel que $tr_n = r_{n+1}$ entraine $z = atr_n a^n = atz$ donc $z = 0$ ou a inversible. De plus comme $r_{n+1} a^{n+1} = r_n a^n$ donc $a^n(r_n - ar_{n+1})$ et a nilpotent (mais dans ce cas $z = 0$) ou l'idéal $(r_{n+1}) \supseteq (r_n)$.

Soit $P_1, .., P_k$ des idéaux premiers tels que $P_1..P_k = (0)$. Aucun n'est nul d'après ci-dessus. Soit S_i un ensemble qui contient exactement un représentant par classe de A/P_i, donc chaque S_i a un cardinal au plus celui de $\mathbb{R}$. De plus $P_1 \cap .. \cap P_k$ ne contient que des éléments nilpotents, c'est à dire nuls à cause du raisonnement précédent et dans notre hypothèse

Si on note $v(x)(i)$ l'unique élément de S_i tel que $x - v(x)(i) \in S_i$, l'application $x \mapsto v(x)$ est une injection de A dans $\prod_i S_i$ donc on obtient encore que card(A)$\leq card(\mathbb{R}^k) = card(\mathbb{R})$

Il reste le cas où l'anneau ne contient que des éléments inversibles en dehors de 0, c'est donc un corps et il est donc fini

3.2.2 Généralisation

Les arguments utilisés ci-dessus sont tout de même bien spécifiques aux anneaux. Ainsi il est prouvé la petitesse des anneaux noethériens compacts, mais il n'y a pas d'indications que le cardinal d'un anneau ayant une tendance à la compacité soit à priori limité par son indice de noethérianité!

Pourtant, un principe général, utilisant des grands cardinaux, mais toujours les mêmes grands cardinaux, va dans ce sens. Nous passons ce phénomène "canonique" en revue en dernière section du chapitre. Présentemant, nous nous contentons de signaler les "évidences" en quelque sorte

3.2.3 Les corps

N'importe quelle structure a un indice de compacité dans le sens suivant:

Définition 34 *Soit E un ensemble et L un ensemble d'opérations sur E. On appelle indice de compacité de (E, L) le premier cardinal κ tel qu'il existe une topologie séparée sur E, rendant les opérations de L continues et telle que tout recouvrement ouvert admet un sousrecouvrement de cardinal au plus κ*

L'existence d'une collection non ensemble de cardinaux fortement compacts suffit à limiter le cardinal d'un corps par son indice de compacité:

Lemme 35 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour tout corps C dont l'indice de compacité est $\leq a$, on a: $card(C) \leq b$*

La preuve est exactement la même que pour la finitude des corps compacts. Soit W un ultrafiltre sur C dont l'additivité est $> a$. Il suffit de prouver qu'il est principal. Soit x un élément de C qui appartient à toutes les éléments standards de W. Il existe un élément standard a de C tel que tout ouvert standard U vérifie $a \in U$ implique $x \in U$ (x est superproche de a). Quitte à regarder $x - a$ on peut supposer que $a = 0$. Soit y tel que $xy = 1$ et b superproche de y. On obtient alors que $1 = xy$ est superproche de 1. Cette contradiction montre que $x = a$ et que $\{a\} \in W$.

On invite le lecteur à se reporter à la dernière section du chapitre pour des remarques plus détaillées sur ces subterfuges uniformes dus à l'analyse non standard

On annonce ici un théorème que nous ne pouvons pas prouver sans rajouter un axiome de grand cardinal ad hoc. Nous en omettons donc une preuve indigeste et sans utilité (il n'est pas exclu que l'axiome de grand cardinal utilisé soit inconsistant, par exemple, nous n'avons rien testé longtemps)

On peut montrer avec la même "facilité" que tout anneau **noethérien** a un cardinal limité par son indice de compacité:

Théorème 36 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour tout anneau noethérien A, si l'indice de compacité de A est $\leq a$ alors son cardinal est $\leq b$*

Soit κ un cardinal fortement compact $> a$ et J un idéal maximal de A tel que $card(A/J) \geq \kappa$. Se reporter à la dernière section pour la topologie, en particulier le "wlog tous les idéaux sont fermés". On peut supposer que $J = (0)$

Soit W un ultrafiltre κ-additif sur A. Il suffit de prouver que A est un corps. On peut supposer que la topologie d'indice de compacité $\leq a$ est stable par intersections de moins de κ ouverts, quitte à augmenter un peu a.

Il n'existe pas d'éléments nilpotents non nul dans A à cause du fait que sinon, il existerait un entier n, et des b_i tels que $\{x \in A \mid \exists y \in A : x = b_0 + b_1 a + .. + b_n a^n + y a^{n+1}\} \in W$ ce qui rendrait W principal dès que $a^{n+1} = 0$

La noethérianité de A entraine que (0) est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers. On peut donc supposer A intègre (en effet, l'un au moins de A/P, P premier doit contenir au moins κ éléments).

La fin de l'argument est classique. Si a n'est ni nul ni inversible, alors $\cap_n (a^n) = (0)$ (anneau intègre et noethérien). Il s'ensuit qu'il existe une suite u telle que $\{x \in A \mid \forall n \in \mathbb{N} : x - u_n$ est multiple de $a^n\} \in W$ ce qui entraine que W est pincipal

Finalement, un raisonnement un tout petit peu plus tordu amène:

Théorème 37 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour tout anneau C dont l'indice de compacité, ainsi que l'indice d'artinianité sont $\leq a$, on a: $card(C) \leq b$*

D'après un théorème précédent, on sait que l'indice de noethérianité de A peut être supposé $\leq a$ quitte à changer un peu a.

Soit A un anneau muni d'une topologie séparée a-compact et ayant un indice de noethérianité $< a$ et κ un cardinal fortement compact $> a$. Voir dernière section pour le détaillage du fait que sans perte de généralité, on peut supposer que la topologie est stable par intersection mettant en jeu un nombre $< \kappa$ d'ouverts

Soit δ un élément de A non standard et tel que toute application standard de A dans un cardinal $c < \kappa$ standard, l'image de δ est standard. Il existe un élément a superproche de δ et quitte à prendre $\delta - a$ on va supposer que δ est superproche de 0. On peut supposer (voir dernière section) que tous les idéaux de A sont fermés. Le faible indice de noethérianité entraine qu'il existe un idéal J standard maximal parmi les idéaux standards qui ne contiennent pas δ. Remarquons que δ ne peut pas être dans une classe standard de A/J: en effet, si (a, b) est standard et $\delta = b + xa$ alors $0 = b + ua$ pour le u standard qui est superproche de x, ce qui fait que b est un multiple de a et donc δ aussi

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'on s'est placé dans A/J, ie que $J = (0)$. Il s'ensuit que tout élément standard de A est un diviseur de δ.

On suppose maintenant que $a \in A$ est non nul et que a n'est pas inversible. On construit une séquence ordinale (standard) par induction tranfinie en respectant les exigences suivantes:

- $e_0 := a$
- e_{i+1} doit être, s'il en existe, un multiple de e_i, mais ne pas le diviser. On commence par essayer e_i^2 en priorité
- Si i est un ordinal limite, on demande que e_i soit non nul et multiple de tous les $e_j, j < i$ qui précédent, si c'est possible
- Quand on ne peut plus réaliser ces conditions, on s'arrête

On obtient donc une application $i \in \mu \mapsto e_i$ de domaine un certain ordinal μ standard qui est $< \kappa$ à cause de l'indice d'artinianité, mais c'est une contradiction car pour chaque étape $i < \kappa$, l'élément δ est une attestation qu'on peut continuer la construction. Pour chaque $i < \kappa$, standard ou non à cause de la κ additivité de l'ultrafiltre-trace standard de δ, on a que δ est un multiple de e_i, alors que e_i ne peut pas être un multiple de *delta*. En effet, si e standard, $e = x\delta$ alors e superproche de 0 et ça contredit la séparation de A sauf quand $e = 0$

Finalement, il reste la question suivante que nous n'avons pas prouvé:

Question 38 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour tout anneau C dont l'indice de compacité, ainsi que l'indice de noethérianité sont $\leq a$, on a: $card(C) \leq b$*

On peut donner une preuve partielle de cette conjecture en utilisant l'existence d'un *cardinal atomisant*, mais ce dernier axiome de grand cardinal n'est pas dans la littérature. On en écrit tout de même la preuve, puisqu'elle a l'intérêt d'être la même que précédemment, le travail étant réalisé par le cardinal atomisant:

Théorème 39 *Pour tout cardinal a, b, si b est un cardinal atomisant et $b > a$ alors pour tout anneau C dont l'indice de compacité, ainsi que l'indice de noethérianité sont $\leq a$, on a: $card(C) \leq b$*

Soit $\kappa > a$ un cardinal atomisant. Le principe de la preuve est un peu la lemme. On dispose d'un élément δ non standard, superproche de 0, dont l'ultrafiltre trace W est κ additif, et d'un idéal J qui est maximal non seulement à ne pas contenir δ, mais à ne pas contenir le moindre élément qui serait superproche de 0, non standard et image de δ par une fonction standard (ie dont l'ultrafiltre trace aurait une additivité de Tukey supérieure ou égale à celle de W).

On peut supposer que $J = (0)$ quitte à quotienter. On commence par prouver qu'il n'existe pas d'éléments nilpotents non nuls dans l'anneau. Supposons en effet, que $a^2 = 0 \neq a$ soit standard. Il existe x tel que $\delta = xa$. On peut considérer que x est image de δ par une fonction standard. On a forcément que x est superproche de 0 car soit b standard tel que $x = b + \epsilon$ avec ϵ superproche de 0, on obtient $0 = ba$ et $\delta = (b + \epsilon)a$ donc $\delta = \epsilon a$ quitte à remplacer x par $x - b$.

Il s'ensuit que x aussi est multiple de tout élément standard. Par conséquent, il existe y tel que $ya = x$ et donc $\delta = xa = ya^2 = 0$ contradiction.

L'élément δ étant lui-même non nilpotent, on peut supposer que l'anneau est intègre, la maximalité de J et le trop petit nombre d'idéaux premiers maximaux de cet anneau de faible indice de noethérianité obligeant J à être un idéal premier.

On construit de la même manière que dans les preuves précédentes, une séquence **standard** $i \mapsto e_i \neq 0$, tel que e_0 ne soit ni nul ni inversible quand $i > j$: e_i est un multiple de e_j, mais e_j n'est pas un multiple de e_i, i variant dans un ordinal μ et on suppose qu'on a poussé la construction le plus loin possible, ie que e_μ ne peut pas être défini. On a forcément que $\mu \geq \kappa$, ceci étant entre autre dû à l'additivité de W. On ne se fatigue pas, on pose $e_{i+1} = e_i^2$. L'intégrité de l'anneau assure que ça convient et aux étape limite $i < \kappa$ l'ultrafiltre W atteste qu'on peut choisir un e_i qui convient. On remarque que ça oblige l'indice d'artinianité de A à être $> \kappa$

Soit $c > a$ (donc strictement plus grand que l'indice de noethérianité de A). Soit $K_i :=$ l'ensemble des x tels que xe_i est un multiple de δ. La séquence $i \in c \mapsto K_i$ est croissante, donc stationnaire à partir d'un certain rang. Soit i au dela de ce rang, et soit $x \in K_{i+1}$ tel que $xe_{i+1} = \delta$. Comme $x \in K_i$, il s'ensuit que $\exists y : xe_i = y\delta$. Donc $xe_i = yxe_i^2$. L'intégrité de l'anneau entraine que $1 = ye_i$, contradiction

Finalement, on peut se passer du cardinal atomisant:

Théorème 40 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour tout anneau C dont l'indice de compacité, ainsi que l'indice de noethérianité sont $\leq a$, on a: $card(C) \leq b$*

Soit $\kappa > a$ fortement compact . La preuve est du même genre que celles qui précèdent. On se ramène rapidement à un injection de $i \mapsto e_i$ de κ dans l'anneau A vérifiant que pour tout (i, j) : si $i < j$ alors e_j est un multiple de e_i mais ne le divise pas, obtenant ainsi une décroissance stricte. Notons $N_i := \{x \mid xe_i = 0\}$ l'idéal qui annule e_i. Comme elle la séquence de N_i est croissante, quitte à extraire une séquence d'indiscernables, on peut supposer que tous les N_i sont égaux. Pour $i < j < \kappa$ notons $M(i, j) := \{x \mid xe_i \in e_j\}$. En prenant un cardinal assez grand j qui dépasse l'indice de noethérianité de A, on sera forcé d'arriver à la conclusion que tous les $M(i, j), i < j$ sont égaux.

Cette indiscernabilité étant supposée maintenant concernant la séquence $i \mapsto e_i$, on se donne $e_1 < e_2 < e_3$ et on a donc: $\exists x, y$ tels que $xe_1 = e_2$ et $ye_2 = e_3$. Donc $y \in M(2, 3) = M(1, 3)$ donc $\exists k$ tel que $ye_1 = ke_3$. Il s'ensuit que $e_3 = xye_1 = xke_3$ donc $(1 - kx)e_3 = 0$ donc $1 - kx \in N_3 = N_1$, donc $1 - kx \in N_1$ donc $e_1(1 - kx) = 0$ donc $e_1 = kxe_1 = ke_2$ et on obtient une contradiction car e_1 n'est pas un multiple de e_2.

Mais ce théorème peut être vu finalement comme un corollaire du théorème suivant, à condition de garder à l'esprit qu'on utilise deux ingrédients dans sa preuve: (1) que tendance à l'artinianité entraine tendance à la noethérianité et tendance à la noethérianité entraine tendance à l'artinianité + (2) une fois étendue la topologie, sans changer son indice de compacité, **mais avec une stabilité par intersections de $< \kappa$ moins d'items** des ouverts, on obtient que tous les idéaux sont **fermés**

Théorème 41 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour tout anneau (commutatif) A, si l'un des deux indices d'artinianité ou de noethérianité de A est borné par a et si tous ses quotients A/M, par des idéaux maximaux ont un cardinal borné par a alors $card(A)$ lui-même est borné par b*

Il n'y a plus d'histoires de topologie ici. On en déduit les résultats précédents via le fait qu'un corps ayant un petit indice de compacité est petit (mais pour l'utiliser, on passe par un lemme qui dit que tous les idéaux sont fermés et qu'un quotient par un idéal fermé donne une nouvelle topologie **séparée**)

Preuve du théorème: l'ordre de grandeur des indices d'artinianité ou de noethérianité sont équivalents par un théorème précédent. Il existe donc un petit ensemble d'idéaux maximaux de A dont l'intersection est le radical de Jacobson de l'anneau lui-même.

Il suffit donc de prouver que la petitesse du radical de Jacobson (qui, rappel, est l'intersection des idéaux maximaux de l'anneau). Par le même argument que dans les preuves précédentes, on peut supposer que κ est inclus dans A et que W est une normale mesure sur κ. Soit $a \in A$, non nul, dans le radical de Jacobson. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a donc une $i \mapsto e_i \in \kappa \subseteq A$ d'indiscernables au regard de a et autres notions définissables tels que $(e_i) = (e_j)$ pour tous i, j dans κ. On peut supposer que pour tout $a \in A$ non nul, $(a) \in W$, quitte à avoir construit puis quotienté, par un idéal maximal J tel que $J \notin W$.

Il existe un petit ensemble P (de cardinal $< \kappa$) tel que pour tout $x \in A \exists y \in P : x - y \in N := RadicalJacobson(A)$. En particulier, il existe il existe $x, f(e_1), g(e_1) \in P$ telle que $e_1 = (f(e_1) + g(e_1))a$ où $g(e_1) \in N$. Notons $x := g(e_1)$. Forcément $x \neq 0$, et $e_2 \in (x)$. Il existe donc y tel que $e_2 = yx$ donc $e_1 = ba + ye_2a$ où $b := f(e_1)$. Mais e_2 est un multiple de a, donc il existe z tel que $e_2 = za$ donc $e_1 = ba + yza^2$. Il suffit donc de prouver qu'il existe des nilpotents non nuls dans A car si on a choisi un $a \neq 0$ tel que $a^2 = 0$ alors $e_1 = ba$ **avec** $b \in P$ donc tous les indiscernables sont égaux.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Posons $u_0 := a$ et $u(i+1) := u(i)^2$ et aux étapes limites m, si c'est possible, choisissons $u(m)$ multiple non nul de tous les $u(i), i < m$ qui précèdent. Le faible indice de noethérianité entraine qu'il arrive une étape, non limite $< \kappa$, où la construction n'est plus possible (stabilise). On est confronté à un élément non nul v, multiple de a, tel que ou bien $v^2 = 0$ ou bien v est un multiple de v^2. Or si $v(1 - xv) = 0$ cela entraine que $v = 0$, car $v \in N$

Remarquons le *plan* de la preuve résumée précédente: L'anneau A est tel que que son petit indice de noethérianité rend petit son petit indice d'artinianité. Ses corps résiduels sont petits. Il s'ensuit que $A/RadicalJacobson(A)$ est petit. Puis un autre argument mène à la petitesse du RadicalJacobson(A)

Est-ce que de manière générale, sans structure, on peut affirmer l'équivalent de la petitesse du nombre de classes sous des hypothèses relativement faibles et purement ensembliste? La réponse est oui:

Lemme 42 *Soit E un ensemble et T un ensemble de relations d'équivalence, T étant stable par intersections quelconques. On suppose que T sépare E dans le sens que les classes de $E/(\cap(T))$ sont des singletons. Soit r le plus petit cardinal tel que pour tout a, b dans E avec $a \neq b$ il existe $R \in T$ telle que $card(E/R) \leq r$ et $(a, b) \in R$. On note $resolution(E, T)$ ce cardinal*

On dira que le couple (E, T) est bleu quand il vérifie ces hypothèses. Alors pour tout cardinal a il existe un cardinal b tel que pour tout couple (E, T) qui est bleu, si $noetherien(E, T), resolution(E, T) \leq a$ alors $card(E) \leq b$

Soit $R(a, b) \in T$ telle que $(a, b) \notin R(a, b)$ pour tout couple (a, b) d'éléments différents de E. Soit $\kappa > a$ suffisamment grand, et $i \in \kappa \mapsto e_i$ une séquence indiscernable pour R d'éléments de E. Soient a, b avec $a < b$ dans κ; dès lors que a est assez grand, il n'est pas possible que $i \in a \mapsto classe_{R(a,b)}(i)$ soit injective. Il en va de même pour $i > b \mapsto classe_{R(a,b)}(i)$.

Par conséquent, pour tous i, j, k, t dans κ, si $i < j < k < t$ alors $(i, j) \notin R(k, t)$ et $(k, t) \notin R(i, j)$. Soit $s \in \kappa$. Soit $S(s)$ l relation d'équivalence $\in T$ définie par $S(s) := \cap_{i>s} R(s, i)$. On obtient que $s \in \kappa \mapsto S(s)$ est strictement croissante

3.2.4 Conclusion et rappel théorème central

La preuve la plus délicate est celle du théorème général suivant, et surtout celle du lemme intermédiaire, nous rappelons les deux:

Lemme 43 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour tout anneau commutatif A, si $i \in b \mapsto K_i$ est une séquence strictement monotone d'idéaux alors il existe un anneau quotient de A pour lequel existe $i \in a \mapsto L_i$ est une séquence strictement monotone d'idéaux* **principaux**

Ce lemme technique entraine le théorème:

Théorème 44 *Pour tout cardinal a il existe un cardinal b tel que pour tout anneau A si $noetherien(A) \leq a$ alors $artinien(A) \leq b$ et si $artinien(A) \leq a$ alors $noetherien(A) \leq b$*

Et nous rappelons l'argument principal qui prouve ce théorème:
Par le lemme, on peut se ramener à des idéaux principaux. En choisissant un cardinal κ assez grand, on peut construire une séquence $i \in \kappa \mapsto (e_i)$ strictement monotone, suffisamment indiscernable pour que tous les e_i aient le même annulateur et que tous les couples (e_i, e_j) aient les mêmes idéaux de tranfert, ie les mêmes $L(i,j) := \{x \in A \mid xe_i \in e_j\}$.

Que la séquence soit strictement croissante ou strictement décroissante, quitte à réindicer, on obtient **trois éléments de l'anneau**, e_1, e_2, e_3 vérifiant les conditions suivantes:

- $(e_1) \supseteq (e_2) \supseteq (e_3)$
- tous les $annulateur(e_i) := \{t \in A \mid te_i = 0\}$ sont égaux
- tous les $L(i,j)$ quand (i,j) parcourt $\{1;2;3\}$ avec $i < j$ sont égaux

qui ont les conséquences calculatoires suivantes: il existe x, y, k tels que $e_2 = xe_1$ et $e_3 = ye_2$ et "donc" $y = e_1 = ke_3$. Ce qui entraine que $e_3 = xye_1 = xke_3$ donc $(1 - kx) \in annulateur(e_3)$ donc $(1 - kx) \in annul(e_1)$ donc $e_1 = kxe_1$ donc $e_1 = ke_2$.

Et finalement une contradiction avec la strictitude

3.2.5 Anneaux intègres et compacts

On termine ce chapitre, en donnant quelques propriétés des anneaux compacts intègres. Cette illustration est là pour donner un exemple de l'inspiration générée par les ultrafiltres.

Définition 45 *On appelle anneau compact, un anneau commutatif, unitaire, muni d'une topologie* **séparée** *qui rend ses opérations d'anneau continues.*

On va utiliser l'analyse non standard pour raccourcir les preuves.

3.2.6 Lemmes et théorèmes

Soit A un anneau compact et intègre, qui n'est pas un corps, fixé dans toute la suite.
On rappelle que:

Théorème 46 *Tout corps compact est fini*

On rappelle une preuve ANS: soit x un élément du corps. Il est superproche d'un élément a standard. S'il n'estpas lui-même standard, quitte à regarder $x - a$, on obtient un élément superproche de 0 qui n'est pas nul. On suppose donc que $a = 0$ sans perte de généralité.

Soit y tel que $xy = 1$ et b standard tel que y est superproche de b. Alors $1 = xy$ est superproche de $0.b = 0$. La topologie n'est pas séparée

Dans la suite, on utilisera au moins une bonne demi-douzaine de fois le lemme suivant:

Lemme 47 *Soit x, y des éléments de l'anneau compact A. Si x est superproche de 0 alors xy aussi*

Soit b standard tel que y est superproche de b (compacité implique existence de b). Alors xy est superproche de $0b$ donc superproche de 0

Le lemme suivant est un grand classique qui permet entre autre de prouver le théorème de Hindman ou de prouver qu'un semigroupe compact est un groupe.

Lemme 48 *Soit $(E, *)$ un espace compact muni d'une opération $*$ continue à droite qui est associative. Alors il existe $a \in E$ tel que $a * a = a$*

Soit F un ensemble fermé de E, non vide et minimal pour l'inclusion parmi les fermés stables par $*$. Soit $a \in F$. Soit G l'ensemble des $x \in F$ tel que $\exists y \in F : ay = x$; G est un fermé. Le calcul $ax(ay) = a(xay)$ montre que G est inclus dans F et stable par $*$. C'est donc F tout entier. Il existe donc $b \in F$ tel que $ab = a$. Soit H l'ensemble (forcément fermé) des $x \in F$ tels que $ax = a$. On vient de voir qu'il est non vide. Il est stable par $*$ grace au calcul $axy = ay = a$. C'est donc F tout entier. Donc $a * a = a$

Lemme 49 *Soit A un anneau compact. Soit $a \in A$. L'ensemble des $x \in A$ qui sont adhérents à la suite $n \mapsto a^n$ est stable par la multiplication de l'anneau*

On laisse la preuve en exercice

Lemme 50 *Un anneau compact intègre A est local et son unique idéal maximal est à la fois ouvert et fermé*

Soit $a \in A$ qui n'est pas inversible et n un entier naturel. Le calcul

$$(1-a)(1+a+a^2+..+a^n) = 1-a^{n+1}$$

montre que si a^{n+1} est superproche de 0 alors $1-a$ est inversible. En effet, soit b superproche de $1+a+a^2+..+a^n$, avec b standard. On obtient que $(1-a).b$ est superproche de 1 et comme $(1-a).b$ est standard, donc $(1-a).b = 1$ (topologie séparée)

Or on sait qu'il existe $c \in A; n \in \mathbb{N}$ tel que $c^2 = c$ et n supergrand et c superproche de a^n. L'anneau étant intègre, $c = 0$ ou $c = 1$, et comme $c = 1$ implique a inversible par le même argument que ci-dessus, donc $c = 0$. Ainsi il existe un entier n supergrand tel que a^{n+1} est supreproche de 0. Il s'ensuit que $1-a$ est inversible

On vient de prouver que si a n'est pas inversible alors $1-a$ est inversible. Soient x, y tels que $x+y$ soit inversible, et notons t un inverse. Alors $tx + ty = 1$. Il s'ensuit que si tx n'est pas inversible alors ty est inversible. En conclusion: toute somme d'éléments non inversibles est non inversible. Comme un multiple d'un non inversible est non inversible, il s'ensuit que l'ensemble des éléments non inversibles est un **idéal** et l'anneau A est donc local.

Supposons x superproche de 0. Alors pour tout entier $n > 0$: x^n est superproche de 0. En effet, la compacité entraine que $x^{n+1} = x.x^n$ qui est superproche de $0.b$ où b est un standard superproche de x^n (rappel: compacité pour existence de b). Il s'ensuit que $1-x$ est inversible.

Notons M l'unique idéal maximal, soit a standard et $x \in M$ tel que x est superproche de a. Supposons que $a \notin M$. Alors $y := x - a \notin M$ est superproche de 0. Soit t tel que $1 - yt \in M$. Soit b standard superproche de t. Alors $1 = 1 - 0.b$ est superproche de $1 - yt$ qui est un élément de M, mais c'est une contradiction car c'est un élément trop proche de 1 donc par ce qui précède inversible

Pour prouver que M est ouvert, on se contente de prouver que c'est un voisinage de 0. Soit x superproche de 0 qui n'est pas dans M. Soit t tel que $1 - tx \in M$. Soit b standard tel que t est superproche de b. Alors $1 = 1 - b.0$ est superproche de l'élément $1 - tx$ de M et c'est une contradiction car il est inversible

Corollaire 51 *Un anneau intègre, compact et connexe est un corps*

La preuve précédente donne ce corollaire gratuitement.

On signale aussi un des corollaires techniques obtenus:

Corollaire 52 *Soit A un anneau commutatif, unitaire, compact et intègre. Soit $x \in A$ qui est superproche* **de** 1. *Alors x est inversible et $1-x$ n'est pas inversible*

3.2.7 Peut-on limiter le cardinal des anneaux intègres et compacts?

La réponse est non:

Théorème 53 *Soit E un ensemble, K un corps fini. Il existe un anneau intègre et compact A tel que $E \subseteq A$*

On va considérer les éléments de E comme des indéterminées et "in some sense" regarder des séries formelles. On le fait rigoureusement: on note $M :=$ l'ensemble des monômes construits sur les indéterminées qui sont les éléments de E, autrement dit l'ensemble des applications presque nulles de E dans $\mathbb{N}$. On note . la multiplication des monômes. Attention, le monôme vide est noté 1.

On note S l'ensemble des applications de M dans K. On munit S d'une addition et d'une multiplication de la manière suivante:

- $f + g(m) := f(m) + g(m)$
- $f \times g(m) :=$ la somme quand (x, y) parcourt $\{(x, y) \in M^2 \mid x.y = m\}$ des $f(x)g(y)$

On notera que S n'est autre que K^M. On munit K de la topologie discrète et S de la topologie produit de la discrète, obtenant ainsi un espace compact. On laisse au lecteur le soin de prouver qu'ainsi $(S, +, \times)$ est un anneau **intègre** (il y a un peu de travail) et compact

3.2.8 Pour aller (légèrement) vers une réciproque

D'abord une remarque

Remarque

Les preuves précédents montrent en corollaire:

Lemme 54 *Soit A un anneau intègre compact. Soit $a \in A$ tel que a n'est pas inversible. Alors la suite $n \mapsto a^n$ converge vers* 0

L'un des premiers lemmes nous a donné qu'il existe n supergrand tel que a^n est superproche de 0. Soit $p \geq n$ un entier. Alors a^p est un multiple du superproche de 0 qu'est a^n donc est lui-même superproche de 0 d'après le premier lemme

Les "infiniment petits" de l'anneau?

Lemme 55 *Il existe un ensemble fini F d'éléments non inversibles tel que pour tout t, si t divise tous les éléments de F et est non inversible alors l'idéal maximal de l'anneau est (t), ie l'ensemble des multiples de t*

Soit t un élément de A qui est non inversible et tel que pour tout a standard, si a n'est pas inversible alors t divise a. Soit b un élément standard tel que t est superproche de b (compacité).

Ecrivons $t = b + e$ avec e superproche de 0. Alors b n'est pas inversible, sinon t le serait. En effet, soit r tel que $rb = 1$. Alors $r(b + e) = 1 + re$ et comme re est superproche de 0 donc $1 + re$ inversible, contradiction.

Il existe k tel que $b = kt = kb + ke$. Donc $(1 - k)b = ke$ qui est superproche de 0. Soit c standard tel que k est superproche de k. Alors $(1 - c)b = 0$ donc $c = 1$ ou $b = 0$. Si $c = 1$ alors k est inversible et b tout en étant un élément non inversible divise tous les éléments non inversibles standards, mais comme il est standard, il divise tous les éléments non inversibles.

Si $b = 0$ alors t est superproche de 0. Il s'ensuit que n'importe quel élément standard inversible est superproche de 0, ce qui contredit la séparation, sauf si A est un corps.

3.2.9 Remarque

Finalement, ce qui est curieux est qu'on doit changer la multiplication (par rapport à ce qu'on pense par exemple en regardant les anneaux de Boole, pourtant nombreux) pour obtenir de l'intégrité sans tomber dans le trivial (le corps F_2). Ca donne envie de regarder de plus près les phénomènes p-adiques, mais ce n'est pas le thème de ce texte.

Chapter 4

Appendice sur les effets des grands cardinaux

La définition d'un cardinal mesurable est d'être un cardinal κ sur lequel existe un ultrafiltre non principal κ-additif. Un exemple de cardinal mesurable est ... ω. Mais le suivant est très grand.

On rappelle ci-dessous les quelques principaux effets combinatoires canoniques de cette notion. Dans toute la suite CM abrège *cardinal mesurable* $> \omega$.

4.0.10 Cardinaux mesurables

Le lemme suivant est le grand classique du domaine:

Lemme 56 *Soit κ un CM. Il existe sur κ ce qu'on appelle une "normale mesure", c'est à dire un ultrafiltre W sur κ, non principal, κ-additif, mais qui de plus a la propriété suivante: pour toute application $f \in (\kappa \to \kappa)$, il existe $a \in \kappa$ tel que $\{x \in \kappa \mid f(x) \geq x \text{ ou } f(x) = a\} \in W$.*

avec le corollaire suivant qui en pratique est puissant (nous l'avons utilisé dans les lemmes des premières sections):

Lemme 57 *Soit κ un CM et W une normale mesure dessus. Soit $c \in \kappa$ un ordinal et f une application de l'ensemble des parties finies de κ dans c. Alors il existe $\phi \in (\mathbb{N} \to c)$ et $A \in W$ tel que pour toute partie finie G de $A : f(G) = \phi(card(G))$*

L'ensemble A est souvent appelé un *ensemble d'indiscernables au regard de f*.

La définition de "CM" est étrange à priori dans la mesure où elle évoque une existence (d'un ultrafiltre tel que blabla). On peut donner une définition plus combinatoire et en quelque sorte "plus pure" mais moins "évocatrice" de tout ça.

Soit a, b, c trois cardinaux:

Définition 58 *On dira qu'il sont en position de compacité quand pour tout ensemble E et toute ensemble D de parties de E: si $\forall X \in D : card(X) \leq a$ et $\cap(D)$ est inclus dans un singleton et si pour toute fonction choix f sur $P(E)$, il existe $L \subseteq D$ avec $card(L) < b$ et $E = \{x \in E \mid \exists X \in L : x \in f(X)\}$ alors il existe une partie M de D telle que $E = \{x \in E \mid \exists X \in L : x \in cap(X)\}$ et $card(M) < c$*

Une intuition rapide et naive pourrait être que pour tout a, b, il existe un c pas trop gros, par exemple majoré par $max(a^b, b^a)$ tel que (a, b, c) est en position de compacité. "Hélas" (ou heureusement), il n'en est rien. La recherche de c explose même pour de petits a, b:

Lemme 59 *Soit κ le plus petit CM. Soit $c < \kappa$. Alors (ω, ω, c) n'est pas en position de compacité. En revanche (ω, ω, κ) est en position de compacité*

A chaque ultrafiltre non principal U sur c, on peut associer une famille de parties $n \mapsto A_n(U) \in U$ telle que $\cap_n A_n(U)$ est vide. A chaque ultrafiltre principal $W_a := \{X \in P(E) \mid a \in X\}$, on pose $A_n(W_a) := \{a\}$. Soit $U \mapsto n(U) \in \mathbb{N}$. Il existe alors un ensemble fini F tel que $\forall i \in c \exists U \in F : i \in A_{n(U)}$.

On peut supposer que $card(E) \geq \kappa$. Soit W un ultrafiltre non principal et stable par intersections dénombrables sur E. A chaque ensemble dénombrable D de parties de E dont l'intersection est incluse dans un singleton, on peut associer $f(D) \in D$ tel que $f(D) \notin W$. A cause de la κ-additivité de W, il n'existe alors pas d'ensemble T de cardinal strictement inférieur à κ tel que $\forall x \in E \exists D \in T : x \in f(D)$.

Le raisonnement qui précède caractérise les cardinaux mesurables d'une manière un peu plus "combinatoire" que la définition utilisant des ultrafiltres et s'étend tel quel en un raisonnement qui donne:

Théorème 60 *Soit a, b des cardinaux infinis. Le premier CM qui est $> a, b$ est le premier cardinal κ tel que (a, b, κ) est en position de compacité*

Les seuls cardinaux qui permettent d'étendre les procédés usuels de topologie semblent être les fortement compacts, dont la définition suit:

Définition 61 *Un cardinal κ est dit fortement compact quand pour tout ensemble E et tout filtre F qui est κ-additif sur E admet un prolongement en un ultrafiltre κ-additif sur E*

Leur avantage est qu'on peut raisonner avec eux de la même manière qu'on raisonne avec le fini et ω. Les lemmes qui suivent l'illustrent. Ce ne sont que des exemples dont on devine derrière le principe général.

Lemme 62 *Soit E un ensemble et T un ensemble de parties de E ayant la propriété suivantes: tout recouvrement de E par des éléments de T admet un sous-recouvrement de cardinal strictement inférieur à κ. Soit S l'ensemble des réunions quelconques d'ensembles qui sont intersection d'un petit ensemble d'éléments de T , où "petit" veut dire "de cardinal $< \kappa$.*

Alors S est une topologie, toute intersection de moins de κ ouverts est un ouvert et tout recouvrement de E par des éléments de S admet un sous-recouvrement de cardinal strictement inférieur à κ

Comme dans le cas fini, si un anneau A a un petit indice de compacité et un petit indice de noethérianité (tous deux $< \kappa$ supposé fortement compact) et si on munit A d'une topologie qui témoigne pour son indice de compacité, alors quitte à clôturer par les intersections de moins de κ ouverts, tous les idéaux de A seront **fermés** sans que ça n'augmente trop ses indicés (ils resteront strictement inférieurs à κ)

On écrit cela dans un lemme rigoureux:

Lemme 63 *Soit κ fortement compact et A un anneau muni d'une topologie séparée T d'indice de compacité $< \kappa$. On suppose aussi que A a un indice de noethérianité $< \kappa$. Alors on peut agrandir sa topologie T en une topologie T' telle que les opérations de A restent continues, l'indice de compacité de T' reste $< \kappa$, toutes les intersections de moins de κ ensembles T'-ouverts est un T'-ouvert et de plus, tous les idéaux de A sont fermés pour T'*

Preuve: soit T' la topologie engendrée par les intersections de moins de κ éléments de T. On termine la preuve en analyse non standard. Supposons que l'indice de compacité de T' soit au moins κ, et soit $i \in \kappa \mapsto R_i$ un recouvrement par des éléments de T' qui en témoigne. On peut sans perte de généralité supposer que les chaque R_i est de la forme $\cap_{j\in S(i)} U(i,j)$ où les $U(i,j) \in T$ et chaque $card(S(i)) < \kappa$. Il existe un ultrafiltre W qui est κ-additif et tel que pour tout $i \in \kappa : R_i \notin W$. On obtient ainsi f de domaine κ telle que pour tout $i \in \kappa : U(i, f(i)) \notin W$ et $f(i) \in S(i)$ ce qui est une contradiction.

On laisse au lecteur les preuves de continuité et on prouve que tous les idéaux sont T'-fermés. Soit J un idéal de A. Son petit indice de noethérianité, entraîne l'existence de $\mu < \kappa$ et $i \in \mu \mapsto e_i \in J$ qui engendre J. Soit a standard et $x_1e_1 + .. + x_ne_n$ superproche au sens de T' de a. On peut supposer que n est standard à cause de la κ-additivité. Le faible indice de compacité entraîne l'existence de $u_1, .., u_n$ qui sont superproches de $x_1, .., x_n$ au sens de T'. On obtient donc que $a = u_1e_1 + .. + u_ne_n$ d'où $a \in J$

Nous terminons le chapitre avec trois axiomes "exotiques" de grands cardinaux.

4.1 Axiomes ou conjectures

4.1.1 Notion de cardinal atomisant

Un sextuplet $(E, T, F, a, \kappa, R, A)$ est appelé **un rêve** quand (E, T) est un espace topologique séparé, F est un filtre κ-additif qui contient tous les voisinages de $a \in E$ et R est un ensemble de parties T-fermées de E dont l'indice de noethérianité est strictement plus petit que κ, stable par intersections quelconques et $R \ni A \notin F$.

Définition 64 *Un cardinal κ est dit atomisant quand il est fortement compact et quand pour tout rêve $(E, T, F, a, \kappa, R, A)$, il existe un ultrafiltre $W \supseteq F$ sur E qui est κ-additif et $B \in R \setminus W$ tel que pour toute application $f \in E \to E$, tout $X \in R$, si $W' := image(f, W) \supseteq F$ et $X \supseteq B$, si $X \neq B$ alors $B \in W'$*

On ignore la force de l'axiome suivant:

Axiome-conjecture 65 *Pour tout ordinal a, il existe $\kappa > a$ tel que κ est atomisant*

4.1.2 Relativisation

Cet axiome n'est peut-être pas consistant. On peut cependant paramétrer en restreignant la classes des espaces topologiques autorisés:

soit C une collection d'esapce topologique. Un sextuplet $(E, T, F, a, \kappa, R, A)$ est appelé **un C-rêve** quand (E, T) est un espace topologique séparé, F est un filtre κ-additif qui contient tous les voisinages de $a \in E$ et R est un ensemble de parties T-fermées de E dont l'indice de noethérianité est strictement plus petit que κ, stable par intersections quelconques et $R \ni A \notin F$.

Définition 66 *Un cardinal κ est dit C-atomisant quand il est fortement compact et quand pour tout C-rève $(E, T, F, a, \kappa, R, A)$, il existe un ultrafiltre $W \supseteq F$ sur E qui est κ-additif et $B \in R \setminus W$ tel que pour toute application $f \in E \to E$, tout $X \in R$, si $W' := image(f, W) \supseteq F$ et $X \supseteq B$, si $X \neq B$ alors $B \in W'$*

Ce qui donne les C-axiomes suivants:

Axiome-conjecture 67 *Pour tout ordinal a, il existe $\kappa > a$ tel que κ est C-atomisant*

Les deux axiomes suivants sont des conjectures qui vont dans le sens des résultats constatés sur les anneaux et quelques autres espaces:

4.1.3 De artinien vers noethérien

Définition 68 *Soit κ un cardinal. On dit qu'il est étroit quand pour tout ensemble ordonné E dont l'indice de noethérianité est $\geq \kappa$ et l'indice d'artiniainité est $< \kappa$, il existe une partie S de E dont l'indice de noethérianité est $\geq \kappa$ et l'indice d'artiniainité est $\leq \omega$*

La définition suivante est plus sévère:

Définition 69 *Soit κ un cardinal. On dit qu'il est superétroit quand pour tout ensemble ordonné E dont l'indice de noethérianité est $\geq \kappa$ et l'indice d'artinianité est $< \kappa$, il existe une partition de E en strictement moins de κ parties S de E dont l'indice de noethérianité est $\geq \kappa$ et l'indice d'artinianité est $\leq \omega$*

On formule alors les axiomes suivants (on met tout dans un seul énoncé):

Axiome-conjecture 70 *La collection des cardinaux étroits (resp superétroits) n'est pas un ensemble*

4.1.4 Conjecture algébrique

Appelons structure algébrique topologique la donnée d'un triplet $S := (E, R, T)$ tel que R est un ensemble d'applications de $E^{\mathbb{N}}$ dans E, T est une topologie séparée sur E et tous les éléments de R sont continus **(pour la topologie produit)**. On appelle *morphisme de S* une application ϕ de E dans E qui respecte les opérations de R, ie telle que pour tout $f \in R$ et toute suite $u \in E^{\mathbb{N}}$: $\phi(f(u)) = f(u \circ \phi)$. On appelle *idéal de S* une partie de E^2 de la forme $\{(x,y)^2 \mid \phi(x) = \phi(y)\}$ où ϕ est un morphisme de S

Notons:

- $compacite(S)$ le plus petit cardinal a tel que tout recouvrement ouvert de E admet un sous-recouvrement de cardinal $< a$
- $noetherien(S)$ l'indice de noethérianité de $(E, Ideaux(E))$ en tant qu'espace-caillou
- $artinien(S)$ l'indice d'artinianité de $(E, Ideaux(E))$ en tant qu'espace-caillou
- $verbage(S)$ le cardinal de R
- $monotonie(S)$ est le plus petit entre $noetherien(S)$ et $artinien(S)$
- $bilan(S)$ est le maximum entre $compacite(S); monotonie(S); verbage(S)$

Nous conjecturons que l'axiome suivant est consistant:

Axiome-conjecture 71 *Pour tout cardinal a, il existe un cardinal b tel que pour toute structure algébrique $S := (E, R, T)$, si $bilan(S) \leq a$ alors $card(E) \leq b$*

4.2 Nécessité ou non des axiomes de grands cardinaux?

Les théorèmes sur les anneaux qui précèdent peuvent tous être prouvés dans ZFC seul à l'exception de ceux faisant intervenir la topologie et celui affirmant l'équivalence des ordres de grandeur des indices de noethérianité et d'artinianité. La plupart des preuves pourraient êter récrites un peu plus longues avec un recours au théorème de Erdos-Rado. Dans tous les cas (en dehors des considérations topologiques), un cardinal de Ramsey suffit (une simple inspection des arguments utilisés suffit)

Nous donnons quelques exemples d'énoncés concernant des objets des mathématiques courantes dont nous ignorons si le grand cardinal utilisé dans les preuves qu'on mentionne peut être évité. L'intérêt de ces énoncés est qu'ils sont "triviaux" quand on admet les axiomes de grand cardinaux qui permettent de les démontrer.

Définition 72 *Une partie A d'un Banach est dite pourvoir être coupée quand il existe un hyperplan fermé dont les deux demi-espaces ouverts partitionnent A en deux parties non vides*

Le théorème suivant est inspiré par les cardinaux supercompacts:

Théorème 73 *Il existe un cardinal κ ayant la propriété suivante: pour tout Banach B, pour tout $A \subseteq B$, pour toute partie $D \subseteq B$ tel que $card(D) \leq \kappa$, si toute partie X telle que $D \subseteq X \subseteq A$ vérifiant $card(X) < \kappa$ peut être coupée alors A tout entière peut être coupée*

N'importe quel cardinal supercompact a cette propriété. Curieusement, nous ne savons pas le prouver en utilisant seulement un cardinal fortement compact.

Soit W un ultrafiltre κ-additif sur $P_{<\kappa}(A)$, qui soit normal dans le sens que pour toute fonction de domaine $P_{<\kappa}(A)$, il existe $a \in A$ tel que $\{X \mid f(X) \notin X \text{ ou } f(X) = a\} \in W$. Soit S appartenant à tous les éléments standard de W. En particulier $D \subseteq S \subseteq A$. Par hypothèse, il existe une forme affine h_S, qui est Lipschitzienne, et deux éléments $a(S), b(S)$ de S tels que $h_S(a(S)) < 0 < h_S(b(S))$ et S ne rencontre pas l'hyperplan de h_S, la fonction $S \mapsto (h_S, a(A), b(S))$ étant standards. W étant normal, il existe u, v, g standards, où u, v sont dans S et g est Lipschitzienne (de même rapport que h_S), vérifiant pour tout $x \in B$ standard, que $g(x) = h_S(x)$. La forme affine g coupe A

4.3 Limites et portes

4.3.1 Axiome de catalyse

L'utilisation d'axiomes de grands cardinaux offrent une sorte de "réparation" partielle à la limite découverte par Godel. On sait déjà qu'ils peinent à décider d'énoncés comme l'hypothèse du continu (qui y semble insensible pour des raisons profondes). Il n'est pas clair qu'ils offrent une sorte de chaine totalement ordonnées (axiomes de plus en plus fort), ni même qu'une chaine totalement ordonnée soit pertinente. Dans la suite, afin de ne pas alourdir la cabalistique, nous restons informels. Les références données offrent un panorama détaillé de l'aspect technique.

Nous avions proposé dans les années 95 un schéma d'axiomes dont la vocation n'est pas d'être fort, mais plutôt d'être un **catalyseur** universel.

Axiome-conjecture 74 *Pour tout énoncé clos P sans paramètre du langage de ZFC, si P peut être définitivement forcé alors P. Cet axiome sera appelé "axiome de catalyse"*

On entend par *pouvoir être définitivement forcé*, le fait qu'il existe une extension générique de l'univers V_2 telle que pour toute extension générique V_3 de V_2, on a $V_3 \models P$

Ce schéma n'est pas "fort en soi", puisqu'il est relativement consistant avec ZFC. En effet, toute preuve utilise un nombre fini de mots, de phrases et d'articulations et ;axiomes $A_1, .., A_p$ et donc, en passant successivement dans des extensions génériques de plus en plus larges, $V_n > V_{n-1} > ... > V_{inital}$, on obtient que tous les A_i sont vérifiés dans V_n

Par un argument similaire, on passe d'un univers bien fondé à un univers **bien fondé** vérifiant le schéma, à condition toutefois d'avoir supposé l'univers initial suffisamment grand (par exemple de hauteur au moins ω_1)

L'intérêt de ce schéma d'axiome est de deux natures:

- Presque tous les mathématiciens ensembliste ont tendance à y adhérer "naturellement", sans même forcément l'énoncer explictement
- C'est un **catalyseur**

Appelons *propriété de grand cardinal* une relation unaire R telle que:

0) ZFC démontre que pour tout $x : R(x)$ implique x est un cardinal inaccessible

1) ZFC démontre que si $R(\kappa)$ et si B est une algèbre de Boole complète appartenant à V_κ alors dans toute B-extension générique V' de V, on a $V' \models R(\kappa)$.

2) ZFC démontre que l'énoncé $\exists R(x)$ n'est pas forçable.

L'intérêt du schéma précédent est que pour tout axiome de grand cardinal $R(x)$, il entraîne que s'il existe x tel que $R(x)$ alors il en existe une classe qui n'est pas un ensemble. En effet, s'il existe α qui est au dessus de tous les β tels que $R(\beta)$ alors en rendant α dénombrable dans une extension générique, on a détruit tous les x vérifiant $R(x)$ et on en a créé aucun. Et aucune future extension ne pourra en recréer.

Il s'ensuit qu'il ne peut pas exister de définition suffisamment absolue de propriété (disons "être supergrand") d'axiome de grand cardinal qui soit telle que tout cardinal qui la vérifie a son ensemble vérité qui inclut le schéma de catalyse, sauf à ce que ça implique qu'il existe au plus un cardinal supergrand.

4.3.2 Portes de l'univers

On va dans le sens opposé à la sous-section précédente (mais les deux ne sont pas incompatibles). On reste encore informel. Il n'y a par le th de Godel, aucune contradiction, ni même limitation à considérer qu'il existe un ensemble inaccessible E et un énoncé P tel que, d'une part $E \models P$ et d'autre part, ZFC démontre que *pour tout inaccessible F si $F \models P$ alors il n'existe qu'un nombre fini d'inaccessibles au dessus de F*

On appellera *finiporte* l'énoncé précédent. Sa vérité implique une sorte de *dernière station avant fin de l'autoroute.* Le lecteur pourrait se demander quel genre d'énoncé P pourrait être tel que ZFC démontre que *pour tout inaccessible F si $F \models P$ alors il n'existe qu'un nombre fini d'inaccessibles au dessus de F* et qui soit vérifié par au moins un inaccessible. En particulier, à partir de quel nombre de symboles peut-on espérer en trouver? Nous remarquons qu'il n'y a pas besoin d'aller le chercher bien loin.

Théorème 75 *Pour tout inaccessible E, si $E \models finiporte$ alors il existe* **au plus** *ω inaccessibles au dessus de E*

Le choix de "fini" est tout à fait arbitraire, nous aurions tout aussi bien pu demander "au plus dénombrabe". On aurait tout autant obtenu un énoncé que l'on peut qualifer de "porte". Il s'ensuit que des énoncés bien concrets sont naturellement candidats à être des portes. En général, il n'y a pas de phénomène "non standard" qui discriminerait des sortes d'énoncés portes qui seraient "dans les limbes". Tout simplement parce qu'affirmer l'existence d'un énoncé porte sous la forme Q:=$\exists X$: X *est une porte de type1* donne **un énoncé porte Q** tout simple.

On signale, sans démonstration (le lecteur le vérifiera immédiatement), et sans formalisation un théorème général:

Lemme 76 *Toute tentative pour prouver l'inexistence de portes se solde forcément par un échec. Sauf si ZFC est "peu" consistant dans le sens qu'il existe de "petits" axiomes de grands cardinaux qui sont contradictoires*

En particulier, il existe moult modèles bien fondés de ZFC vérifiant des énoncés portes, même si l'univers n'en contient pas. Pour les habitants d'un univers (métaphore), une porte est le signe ou bien qu'on est arrivé "presque en haut" de l'univers (vision platonicienne), ou bien que l'univers n'est pas "plein" (de la même même manière que les habitants d'un univers dénombrable et bien fondé commenceraient, voyant leur porte, à soupçonner qu'ils sont dans un sous-univers).

Mais cette porte de sortie (sans jeu de mots) d'envisager un univers non plein ne marche plus dans le cadre absolu de l'univers L dont on ne peut pas estimer qu'il est déficient en largeur, puisque par définition, il est le plus étroit possible. Par conséquent, envisager que lui contienne des portes suffit à mettre un terme à l'univers. Et cela s'énonce sans supposer $V = L$:

Axiome-conjecture 77 $L \models$ *il existe un ensemble inaccessible E et un énoncé P tel que, d'une part $E \models P$ et d'autre part, $ZFC + V = L$ démontre que pour tout inaccessible F si $F \models P$ alors il n'existe qu'un nombre fini d'inaccessibles au dessus de F*

En collapsant les portes de L (en les rendant dénombrables), on force l'univers entier à ne vérifier aucun axiome de grand cardinal respectable, et ce , de manière absolue. Par ailleurs, les habitants ne peuvent plus penser que l'arrivée "en haut" n'est qu'une apparence liée au fait que l'univers n'est pas plein. Leur seule alternative est de penser que l'univers est .. mal fondé.

Revenons aux portes indépendamment de L. Il n'y a aucune contradiction à supposer *qu'il existe un inaccessible E vérifiant un énoncé porte mais tel que $E \models$ tous les axiomes de grand cardinal qu'on a l'habitude d'utiliser*